UNDERSÖGELSE

AF

RESTEN I LAGRANGES RÆKKE.

VED

C. RAMUS.

Undersögelse af Resten i Lagranges Række.

1. Betegnes Resten i *Taylors* Række ved ρ_n, saa at

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+\cdots+f^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{1.2...n-1}+\rho_n, \quad (1)$$

haves til Bestemmelse af ρ_n fölgende Differents-Ligning

$$\rho_n=f^n(x)\frac{h^n}{1.2...n}+\rho_{n+1}, \quad (2)$$

og det er desuden bekjendt, at denne Störrelse er paa fölgende Maade bestemt:

$$\rho_n=\frac{h^n}{1.2...n-1}\int_0^1 f^n[x+h(1-z)]\,z^{n-1}\,dz. \quad (3)$$

Rigtigheden af dette Udtryk bevises derved, at det almindeligen tilfredsstiller Ligning (2), og at det desuden er gjældende for $n=1$. Ved deelviis Integration haves nemlig

$$\int f^n[x+h(1-z)]\,z^{n-1}\,dz=f^n[x+h(1-z)]\frac{z^n}{n}+\frac{h}{n}\int f^{n+1}[x+h(1-z)]\,z^n\,dz$$

altsaa

$$\int_0^1 f^n[x+h(1-z)]\,z^{n-1}\,dz=\frac{1}{n}f^n(x)+\frac{h}{n}\int_0^1 f^{n+1}[x+h(1-z)]'z^n\,dz,$$

hvilket ved Multiplication med $\frac{h^n}{1.2...n-1}$ giver (2); og for $n=1$ bliver

Udtrykket (3) dette

$$\rho_1 = h\int_0^1 f'\,[x + h\,(1-z)]\,dz,$$

men $\int f'[x+h(1-z)]dz = -\dfrac{1}{h}f[x+h(1-z)]$, altsaa $\rho_1 = f(x+h) - f(x)$ eller $f(x+h) = f(x) + \rho_1$, hvilket er det samme, som haves ved i (1) at sætte $n = 1$.

2. Resten i *Lagranges* Række være betegnet ved r_n, saa at man har

$$f\beta = fa + \varphi a.f'a.\frac{y}{1} + \frac{d.(\varphi a)^2 f'a}{da}.\frac{y^2}{1.2} + \frac{d^2.(\varphi a)^3 f'a}{da^2}.\frac{y^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^{n-2}.(\varphi a)^{n-1} f'a}{da^{n-2}}.\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots n-1} + r_n \quad (4)$$

hvor β betegner den mindste Rod i Ligningen

$$x = a + y\varphi x \qquad (5)$$

oplöst med Hensyn til x. I det specielle Tilfælde hvor $\varphi x = 1$, bliver $\beta = a + y$ og Lagranges Række reduceres til Taylors for $f(a+y)$ udviklet efter stigende Potentser af y. I dette Tilfælde, $\varphi x = 1$, maa altsaa r_n ifölge (3) være denne:

$$r'_n = \frac{y^n}{1.2\ldots n-1}\int_0^1 f^n\,[a + y\,(1-z)]\,z^{n-1}\,dz. \qquad (6)$$

Det almindelige Udtryk for r_n, gjældende for en hvilkensomhelst Function φx, skal tilfredsstille Differents-Ligningen

$$r_n = \frac{d^{n-1}.(\varphi a)^n f'a}{da^{n-1}}.\frac{y^n}{1.2\ldots n} + r_{n+1} \qquad (7)$$

og maa desuden indsat i (4) give en identisk Ligning for en speciel Værdie af n. Begge disse Betingelser ere opfyldte ved fölgende Udtryk:

$$r_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n-2.2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-u\sqrt{-1}}\,du\int_0^1 \frac{d^{n-1}.\{f'[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]\,l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]]\}}{dz^{n-1}}\,z^{n-2}\,dz. \quad (8)$$

Dette findes directe ved at gaae ud fra den samme Formel, paa hvilken *Poisson* stöttede sit Beviis for og sin Generalisation af *Parsevals* Theorem. Denne Formel kan saaledes skrives (s. *Journal de l'école polytechnique, XIX*^me^ *cah. pag. 496*):

$$\frac{d^{i-1}.(\varphi a)^i f'a}{da^{i-1}}\cdot\frac{y^i}{1.2...i}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{-iu\sqrt{-1}}}{1.2...i-1}\,\frac{d^{i-1}.f'a\,l.(1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi a)}{da^{i-1}}du. \qquad (9)$$

Tages her successive $i=1, 2, 3, \ldots \infty$, og summeres venstre Side ved Lagranges, höire Side ved Taylors Række, erholdes det generaliserede Parsevalske Theorem:

$$f\beta-fa=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-u\sqrt{-1}}f'(a+e^{-u\sqrt{-1}})\,l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi(a+e^{-u\sqrt{-1}})].du. \qquad (10)$$

Tage vi derimod successive $i=n, n+1, n+2, \ldots \infty$ og summere höire Side ved Hjælp af Formlen (3) for den Taylorske Rækkes Rest, erholde vi:

$$\frac{1}{1.2...n-2.2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-nu\sqrt{-1}}du\int_0^1\frac{d^{n-1}.\{f'[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]\,l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]]\}}{da^{n-1}}z^{n-2}dz, (11)$$

hvilket Udtryk er det samme som (8). Omendskjöndt nu Rigtigheden heraf er godtgjort, vil det dog ikke være overflödigt endnu at pröve, om de to ovenfor anförte Betingelser ere opfyldte. For Kortheds Skyld være

$$Fz=f'[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]\,l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]],$$

saa at (8) kan skrives

$$r_n=\frac{(-1)^n}{1.2...n-2.2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-u\sqrt{-1}}du\int_0^1\frac{d^{n-1}.Fz}{dz^{n-1}}z^{n-2}dz. \qquad (12)$$

Ved deelviis Integration haves

$$\int\frac{d^{n-1}.Fz}{dz^{n-1}}z^{n-2}dz=\frac{d^{n-1}.Fz}{dz^{n-1}}\cdot\frac{z^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\int\frac{d^n.Fz}{dz^n}z^{n-1}dz$$

$$=(-1)^{n-1}e^{-(n-1)u\sqrt{-1}}\frac{d^{n-1}.Fz}{da^{n-1}}\cdot\frac{z^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{n-1}\int\frac{d^n.Fz}{dz^n}z^{n-1}dz,$$

altsaa

$$\int_0^1 \frac{d^{n-1}.Fz}{dz^{n-1}} z^{n-2}dz = \frac{(-1)^{n-1}e^{-(n-1)u\sqrt{-1}}}{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}.f'a\, l.(1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi a)}{da^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{d^n.Fz}{dz^n} z^{n-1}dz.$$

Dette indsat i (12) giver ifölge (9)

$$r_n = \frac{d^{n-1}.(\varphi a)^n f'a}{da^{n-1}} \cdot \frac{y^n}{1.2...n} + \frac{(-1)^{n+1}}{1.2...n-1.2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-u\sqrt{-1}} \int_0^1 \frac{d^n.Fz}{dz^n} z^{n-1}dz,$$

hvilket er det samme, som er udtrykt i Formlen (7). For $n=1$ er Udtrykket (8) ubrugbart, men $n=2$ giver

$$r_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-u\sqrt{-1}}du \int_0^1 \frac{d.\{f'[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]]\}}{dz}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-u\sqrt{-1}}du \left\{ f'a\, l.(1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi a) - f'(a+e^{-u\sqrt{-1}})\, l.[1-ye^{u\sqrt{-1}}\varphi(a+e^{-u\sqrt{-1}})] \right\}.$$

Dette Udtryk er sammensat af to Integraler, af hvilke det förste er bestemt ved i (9) at tage $i=1$, det andet er bestemt ved (10). Indsættes disse Værdier, erholdes

$$r_2 = -\varphi a\, f'a.\, y + f\beta - fa.$$

Dette indsat i (4), naar man deri tager $n=2$, giver en identisk Ligning

3. Antages $\varphi x = 1$, maa Udtrykket (8) blive eensgjældende med (6). Sættes i (11), der er det samme som (8), $\varphi x = 1$, erholdes

$$r'_n = -\frac{1}{1.2...n-2.2\pi}\int_0^1 z^{n-2}dz \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-nu\sqrt{-1}}\, l(1-ye^{u\sqrt{-1}}).f^n[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]du;$$

men ifölge *Poisson* (l. c.) haves

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-nu\sqrt{-1}}\, l(1-ye^{u\sqrt{-1}}).du = \frac{y^n}{n},$$

altsaa, ved at udvikle $f^n[a+e^{-u\sqrt{-1}}(1-z)]$ efter stigende Potentser af $1-z$, og derefter integrere hvert Led med Hensyn til u fra $-\pi$ til $+\pi$, erholdes

$$r'_n = \frac{1}{1.2\ldots n\text{-}2}\int_0^1 \left[f^n a.\frac{y^n}{n} + f^{n+1}a.\frac{1\text{-}z}{1}\frac{y^{n+1}}{n+1} + f^{n+2}a.\frac{(1\text{-}z)^2}{1.2}.\frac{y^{n+2}}{n+2} + \ldots\right] z^{n-2}\,dz$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n\text{-}2}.\frac{1}{da}d.\int_0^1 \left[f^{n-1}a.\frac{y^n}{n} + f^n a.\frac{1\text{-}z}{1}.\frac{y^{n+1}}{n+1} + f^{n+1}a.\frac{(1\text{-}z)^2}{1.2}.\frac{y^{n+2}}{n+2} + \ldots\right] z^{n-2}\,dz$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots n\text{-}2}.\frac{1}{da}d.\int_0^1 z^{n-2}dz \int_0^y y^{n-1} f^{n-1}[a + y(1\text{-}z)]\,dy$$

$$= \frac{1}{da}d.\int_0^y dy.\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots n\text{-}2}\int_0^1 f^{n-1}[a + y(1\text{-}z)]\,z^{n-2}\,dz.$$

Rigtigheden heraf er indlysende; thi $\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots.n\text{-}2}\int_0^1 f^{n-1}[a+y(1\text{-}z)]z^{n-2}dz$ er ifölde (6) det samme som Resten r'_{n-1} i Udviklingen af $f(a+y)$, og aabenbart har man

$$r'_n = \frac{1}{da}d.\int_0^y r'_{n-1}\,dy,$$

nemlig

$$r'_n = \frac{1}{da}d.\int_0^y dy\left[f^{n-1}a.\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots n\text{-}1} + f^n a.\frac{y^n}{1.2\ldots n} + \ldots\right]$$

$$= f^n a.\frac{y^n}{1.2\ldots n} + f^{n+1}a.\frac{y^{n+1}}{1.2\ldots n+1} + \ldots.$$

4. Et Udtryk for r_n forskjelligt fra (8) er givet af *Cauchy (Mém. de l'acad. roy. des sc. de l'institut de France, T. VIII, pag. 133)*, nemlig:

$$\left.\begin{aligned} r_n &= \frac{y^n}{1.2\ldots n\text{-}1}\int_0^1 \psi^n[\beta - z(\beta - a)]\,z^{n-1}\,dz \\ \psi x &= \frac{(x-\beta)(\varphi x)^{n-1}[\varphi x - (x-a)\varphi' x]fx}{x - a - y\varphi x} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

som viser, at r_n er det samme som $\frac{y^n}{(\beta\text{-}a)^n}$ multipliceret med Resten i den

Taylorske Udvikling for $\psi\beta = \psi\,[a + (\beta - a)]$. Cauchys Beviis for denne Sætning, som forresten har den Ubeqvemmelighed at Formlen afhænger explicite af den sögte Rod β, er tillige et nyt Beviis for selve Lagranges Række. Vi ville her fremsætte det saaledes, at det kan forstaaes ogsaa af de Læsere, som ikke kjende Principerne for *le calcul des résidus*, hvilke iövrigt findes udviklede i *Exercices de mathématiques, T. 1. p. 11 o. ff.* — Man sætte

$$l.[x-a-y\varphi x] = l.(x-a) - \frac{y\varphi x}{x-a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^2 \cdots - \frac{1}{n-1}\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1} + \varpi x,$$

altsaa ved Differentiation med Hensyn til x

$$\frac{1-y\varphi' x}{x-a-y\varphi x} = \frac{1}{x-a} - \frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)}{dx} - \tfrac{1}{2}\,\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^2}{dx} \cdots - \frac{1}{n-1}\,\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1}}{dx} + \varpi' x \quad (14)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x-a}\left[1 + \dfrac{y\varphi x}{x-a} + \left(\dfrac{y\varphi x}{x-a}\right)^2 \cdots + \left(\dfrac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1}\right] \\ -\dfrac{y\varphi' x}{x-a}\left[1 + \dfrac{y\varphi x}{x-a} \cdots + \left(\dfrac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-2}\right] + \varpi' x \end{cases}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^n}{x-a-y\varphi x} - \frac{y\varphi' x\left[1-\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1}\right]}{x-a-y\varphi x} + \varpi' x.$$

Fölgelig er $\varpi' x = \dfrac{y^n (\varphi x)^{n-1}\,[\varphi x - (x-a)\,\varphi' x]}{(x-a)^n\,(x-a-y\varphi x)}$. Dette indsat i (14) giver

$$\frac{(1-y\varphi' x)\,fx}{x-a-y\varphi x} = \frac{fx}{x-a} - fx\,\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)}{dx} - \frac{fx}{2}\,\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^2}{dx} \cdots - \frac{fx}{n-1}\,\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1}}{dx} + \frac{y^n \psi x}{(x-a)^n\,(x-\beta)} \quad (15)$$

idet Betydningen af ψx er angiven i (13). ΠX og $\Pi^1 X$, idet X er en Function af x, antages at betegne Coefficienterne for $\dfrac{1}{\varepsilon}$ i Udviklingerne af X efter stigende Potentser af ε, naar for x indsættes i förste Tilfælde $a + \varepsilon$, i andet $\beta + \varepsilon$, hvor β som forhen betegner den mindste Rod i Ligningen $x - a - y\varphi x = 0$. Man vil da have

$$\Pi \frac{(1-y\varphi' x)\, fx}{x-a-y\varphi x}=0, \quad \Pi' \frac{(1-y\varphi' x)\, fx}{x-a-y\varphi x}=f\beta,$$

$$\Pi \frac{fx}{x-a}=fa, \quad \Pi' \frac{fx}{x-a}=0, \quad \Pi' fx \frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m}{dx}=0.$$

$\dfrac{d.\, fx\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m}{dx}$ er Coefficienten for h i Udviklingen af $f(x+h)\left(\dfrac{y\varphi(x+h)}{x+h-a}\right)^m$ efter stigende Potentser af h. Altsaa $\Pi \dfrac{d.\, fx\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m}{dx}$ er Coefficienten for $\dfrac{h}{\varepsilon}$ i Udviklingen af $f(a+h+\varepsilon)\left(\dfrac{y\varphi(a+h+\varepsilon)}{h+\varepsilon}\right)^m$ efter stigende Potentser af h og ε; men denne Udvikling kan aabenbart ikke indeholde $\frac{h}{\varepsilon}$. Altsaa er $\Pi \dfrac{d.\, fx\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m}{dx}=0$ eller

$$\Pi \left\{ fx.\frac{d\left(\frac{(y\varphi x)}{x-a}\right)^m}{dx}+f'x.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m\right\}=0,$$

fölgelig

$$-\frac{1}{m}\Pi\, fx.\frac{d.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m}{dx}=\frac{1}{m}\Pi\, f'x.\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^m=\frac{d^{m-1}.(\varphi a)^m f'a}{da^{m-1}}.\frac{y^m}{1.2\ldots m}.$$

Altsaa, naar $(\Pi+\Pi')X$ antages at betegne det samme som $\Pi X+\Pi' X$, og man underkaster begge Sider af Formlen (15) Operationen $\Pi+\Pi'$, udkommer Formlen (4) idet

$$r_n=y^n(\Pi+\Pi')\frac{\psi x}{(x-a)^n(x-\beta)}. \qquad (16)$$

Ifölge (1) og (3) haves

$$\psi x = \psi[a+(x-a)] = \psi a + \psi' a.\frac{x-a}{1} + \psi'' a.\frac{(x-a)^2}{1.2} \ldots + \psi^{n-1} a.\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n-1}\int_0^1 \psi^n [x-z(x-a] z^{n-1}\, dz,$$

og man har, naar m er positiv heel,

$$\Pi \frac{1}{(x-a)^m (x-\beta)} = \frac{(-1)^{m-1}}{(a-\beta)^m}, \quad \Pi' \frac{1}{(x-a)^m (x-\beta)} = \frac{1}{(\beta-a)^m},$$

altsaa

$$(\Pi + \Pi') \frac{1}{(x-a)^m (x-\beta)} = 0.$$

Endvidere er

$$\Pi \frac{\int_0^1 \psi^n [x-z(x-a)] z^{n-1}\, dz}{x-\beta} = 0, \quad \Pi' \frac{\int_0^1 \psi^n [x-z(x-a)] z^{n-1}\, dz}{x-\beta} = \int_0^1 \psi^n [\beta - z(\beta-a)] z^{n-1}\, dz.$$

Herved bliver Udtrykket (16) transformeret til det ovenfor angivne (13).

5. Antages $\varphi x = 1$, erholdes $\psi x = fx$, idet nemlig $\beta = a + y$. Herved bliver Udtrykket (13) for r_n ligefrem reduceret til Udtrykket (6) for r'_n. Tillige pröves let Rigtigheden af det almindelige Udtryk (13), ved at antage successive $n = 1, 2, 3$ o. s. v. F. Ex. for $n = 1$ skal man have r_1 liig $\frac{y}{\beta-a}$ multipliceret med Resten for Index 1 i den Taylorske Udvikling af $\psi(\beta) = \psi[a + (\beta - a)]$, idet $n = 1$ giver $\psi x = \frac{(x-\beta)[\varphi x - (x-a)\varphi' x] fx}{x - a - y\varphi x}$. Man skal altsaa have $r_1 = \frac{y}{\beta-a}[\psi\beta - \psi a]$. Man har $\psi\beta = \frac{0}{0}$, hvis sande Værdie er $\frac{\varphi\beta - (\beta-a)\varphi'\beta}{1 - y\varphi'\beta} f\beta = \frac{\beta-a}{y} f\beta$, og man har $\psi a = \frac{\beta-a}{y} fa$. Man maa fölgelig have $r_1 = f\beta - fa$. Herved bliver ogsaa Formlen (4) identisk, naar man i denne sætter $n = 1$. — Ved deelviis Integration erholdes ifölge (13), idet man for ψx indgaaende i r_n tydeligere skriver $\psi_n x$ for at betegne dens Afhængighed af Index n:

$$r_{n+1} = \frac{y^{n+1}}{1.2\ldots n}\left[-\frac{\psi^n_{n+1}(a)}{\beta-a} + \frac{n}{\beta-a}\int_0^1 \psi^n_{n+1}[\beta - z(\beta-a)] z^{n-1}\, dz\right]$$

altsaa

$$r_n - r_{n+1} = \frac{y^n}{1.2\ldots n}\left\{\frac{y\psi^n_{n+1}(a)}{\beta-a} + n\int_0^1 \frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{(x-\beta)(\varphi x)^{n-1}[\varphi x-(x-a)\varphi' x]fx}{x-a-y\varphi x}\left[1-\frac{y}{\beta-a}\varphi x\right]\right\}\cdot z^{n-1}\,dz\right\}$$

idet man efter Differentiationen med Hensyn til x forandrer x til $\beta - z(\beta - a)$. Man maa altsaa have ifölge (7)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^{n-1}\,(\varphi a)^n f'a}{da^{n-1}} &= \frac{y\psi^n_{n+1}(a)}{\beta-a} + n\int_0^1 U^n\,[\beta - z(\beta-a)]\,z^{n-1}\,dz \\ U(x) &= \frac{(x-\beta)\varphi(x)^{n-1}\,[\varphi x-(x-a)\varphi' x]\,fx}{x-a-y\varphi x}\left[1-\frac{y}{\beta-a}\varphi x\right] \end{aligned}\right\}$$

Det er neppe muligt at komme til dette Resultat ad nogen anden Vei og saaledes pröve Rigtigheden af *Cauchys* Resultat (13) ved Hjælp af Formlen (7).

6. For Resten r_n haves fremdeles fölgende Udtryk:

$$r_n = y^n \Pi \frac{(\varphi x)^n f'x}{(x-a)^{n-1}} \int_0^1 \frac{z^{n-1}\,dz}{x-a-y\varphi x.\,z} \qquad (17)$$

idet ΠX betegner som forhen Coefficienten for $\frac{1}{\varepsilon}$ i Udviklingen af X efter Potentser af ε efterat man for x har indsat $a + \varepsilon$, men medens denne Udvikling forhen gik frem alene efter stigende Potentser af ε, maa i (17) den anden Factor, det bestemte Integral, först ordnes efter stigende Potentser af y, hvilket frembringer en Række, som med Hensyn til ε gaaer i det uendelige til begge Sider. Ved at foretage denne Udvikling erholdes

$$\int_0^1 \frac{z^{n-1}\,dz}{x-a-y\varphi x.z} = \frac{1}{n(x-a)} + \frac{y\varphi x}{(n+1)(x-a)^2} + \frac{y^2(\varphi x)^2}{(n+2)(x-a)^3} + \cdots$$

hvis almindelige Led er $\frac{y^i(\varphi x)^i}{(n+i)(x-a)^{i+1}}$, saa at det almindelige Led i Udviklingen af Udtrykket (17) er

$$y^{n+i}\,\Pi \frac{(\varphi x)^{n+i} f'x}{(n+i)(x-a)^{n+i}} = \frac{y^{n+i}}{1.2\ldots n+i}\cdot\frac{d^{n+i-1}.\,(\varphi a)^{n+i} f'a}{da^{n+i-1}}$$

hvilket netop er det almindelige Led i den uendelige Række, som er betegnet ved r_n og hvis förste Led svarer til $i=0$. Directe kan Udtrykket (17) udledes af *Murphys* Formel (*Transact. of the Camb. philos. Soc., Vol. IV, Part. 1, pag. 125,* af hvilken Afhandling et Udtog findes i *Ferussacs bulletin des sc. mathém., phys. et chim., Tom. XVI, pag. 128**))

$$f\beta = fa - \Pi f'x\, l.\left(1-\frac{y\varphi x}{x-a}\right).$$

Man har nemlig ifölge (5)

$$l.\left(1-\frac{y\varphi x}{x-a}\right) = -\frac{y\varphi x}{x-a} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^3 \ldots - \frac{1}{n-1}\left(\frac{y\varphi x}{x-a}\right)^{n-1} - \frac{y^n(\varphi x)^n}{(x-a)^n}\int_0^1 \frac{v^{n-1}\,dv}{\left[1-\frac{y\varphi x}{x-a}(1-v)\right]^n}$$

hvoraf fölger

$$r_n = y^n\,\Pi\frac{(\varphi x)^n f'x}{(x-a)^n}\int_0^1 \frac{v^{n-1}\,dv}{\left[1-\frac{y\varphi x}{x-a}(1-v)\right]^n}.$$

Dette Integral transformeres ved at sætte

$$v = \left[1-\frac{y\varphi x}{x-a}(1-v)\right]z$$

hvorved $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dz}{z} + \dfrac{y\varphi x}{x-a}.\dfrac{dz}{1-\frac{y\varphi x}{x-a}z}$, altsaa

$$\int_0^1 \frac{v^{n-1}\,dv}{\left[1-\frac{y\varphi x}{x-a}(1-v)\right]^n} = \int_0^1 z^{n-1}\,dz + \frac{y\varphi x}{x-a}\int_0^1 \frac{z^n\,dz}{1-\frac{y\varphi x}{x-a}z}.$$

Herved erholdes

$$r_n = \frac{y^n}{n}\,\Pi\frac{(\varphi x)^n f'x}{(x-a)^n} + y^{n+1}\,\Pi\frac{(\varphi x)^{n+1} f'x}{(x-a)^n}\int_0^1 \frac{z^n\,dz}{x-a-y\varphi x.\,z},$$

---

*) Da jeg alene kjender denne Afhandling af Udtoget, er det mig ikke bekjendt, om *Murphy* er gaaet ind paa Undersögelsen af Resten.

men $\frac{y^n}{n}\Pi\frac{(\varphi x)^n f'x}{(x-a)^n}=\frac{d^{n-1}.(\varphi a)^n f'a}{da^{n-1}}.\frac{y^n}{1.2\ldots n}$ er det förste Led i Rækken for r_n, altsaa

$$r_{n+1}=y^{n+1}\Pi\frac{(\varphi x)^{n+1}f'x}{(x-a)^n}\int_0^1\frac{z^n\,dz}{x-a-y\varphi x.\,z},$$

som ved at forandre n til $n-1$ giver (17).

Anm. Den Form, hvorunder Laplace har fremstillet Lagranges Række (*Mécanique céleste T. I. pag. 273*), gjör ikke nogen særegen Undersögelse nödvendig; thi ifölge en Bemærkning af *Jacobi* (Crelles Journal für die Mathematik, 6ter Bd. Pag. 272) kan man gaae umiddelbart over fra Lagranges til Laplaces Række ved en blot Substitution, saa at den sidste kun i Formen er almindeligere end den förste. Denne Substitution vilde bestaae i, at man i Formlerne (4) og (5) satte $x=F_1 z$ og forandrede Functionerne φ og f til φF og fF, idet F og F_1 betegne omvendte Functioner.